1. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben am Donnerstag, 19.04.2007)

Aufgabe H1 *Zeitentwicklung des harmonischen Oszillators* (5 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich ein eindimensionaler Oszillator in dem normierten Zustand $|\psi(t{=}0)\rangle$ mit der Wellenfunktion

$$\langle x|\,\psi(0)\rangle \equiv \psi(x,0) \;=\; \sqrt{\tfrac{\alpha}{6\sqrt{\pi}}}\,[1+2(\alpha x)^2]\,\exp[-\tfrac{1}{2}(\alpha x)^2]\;, \quad \alpha = \sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}\;.$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit W_n können in diesem Zustand die Energie-Eigenwerte $E_n = \hbar\omega(n{+}\frac{1}{2})$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gemessen werden?

b) Geben Sie die zeitliche Entwicklung des Zustandes an, also $\langle x|\,\psi(t)\rangle \equiv \psi(x,t) = ?$, und berechnen Sie hierfür die Orts- und die Impulsunschärfe $(\Delta x)^2(t)$ und $(\Delta p)^2(t)$ sowie deren Produkt.

Hinweis: Die normierten Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators zu den vier tiefsten Eigenwerten sind gegeben durch

$$\psi_n(x) = (2^n\,n!\,\tfrac{\sqrt{\pi}}{\alpha})^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-(\alpha x)^2/2}\,H_n(\alpha x)$$

$$\text{mit} \qquad H_0(x) = 1\;, \quad H_1(x) = 2x\;, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2\;, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x\;.$$

Stellen Sie die Operatoren x und p durch die Auf- und Absteigeoperatoren dar (s. Aufgabe P1), und drücken Sie $|\psi(t)\rangle$ durch die Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ aus.

b.w.

Aufgabe H2 *Drehimpuls eines Teilchens im kugelsymmetrischen Potential* (5 Punkte)

Die (nicht normierte) Wellenfunktion eines Teilchens, das sich in einem kugelsymmetrischen Potential befindet, sei gegeben durch

$$\psi(\vec{r}) = (x + y + 3z)\, f(r) \ , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$

a) Zeigen Sie, daß $\psi(\vec{r})$ Eigenfunktion zum Quadrat $\vec{L}^2$ des Drehimpulses ist, und bestimmen Sie den Wert von ℓ in $\vec{L}^2\, \psi(\vec{r}) = \hbar^2 \ell(\ell{+}1)\, \psi(\vec{r})$.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit W_m treten die Eigenwerte $\hbar m$ (wobei $-\ell \leq m \leq +\ell$) der z-Komponente L_z des Drehimpulses in $\psi(\vec{r})$ auf?

c) Bestimmen Sie Mittelwert und Schwankung von L_z im Zustand $|\psi\rangle$, d.h.

$$\langle L_z \rangle = \langle \psi |\, L_z \,| \psi \rangle \,/\, \langle \psi |\, \psi \rangle \qquad \text{und} \qquad (\Delta L_z)^2 = \langle \psi |\, L_z^2 - \langle L_z \rangle^2 \,| \psi \rangle \,/\, \langle \psi |\, \psi \rangle \ .$$

Hinweise: Stellen Sie die Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ in Polarkoordinaten dar und drücken Sie sie durch die Kugelflächenfunktionen Y_ℓ^m aus.
Zwischenresultat: $W_0 = 9/11$, $W_{\pm 1} = 1/11$.
Verwendung der in b) bestimmten Wahrscheinlichkeiten W_m erspart längere Rechnung in c).

Aufgabe H3 *Aufeinanderfolgende Messungen* (5 Punkte)

Betrachten Sie zwei aufeinanderfolgende Messungen an einem in y-Richtung fliegenden Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Die eine Messung sei ein Stern-Gerlach-Apparat in z-Richtung, die andere ein um den Winkel θ in der zx-Ebene rotierter Stern-Gerlach-Apparat. Die Basis sei durch die z-Richtung festgelegt und mit $\{|\uparrow\rangle\, , |\downarrow\rangle\}$ bezeichnet.

a) Wie lautet der Projektor $P_\nearrow$ für den "Spin-auf-Zustand" $|\nearrow\rangle$ des rotierten Apparats? Kommutieren $P_\uparrow$ (der Projektor auf $|\uparrow\rangle$) und $P_\nearrow$?

b) Es liege ein reiner Zustand vor,

$$|\psi\rangle = \alpha\, |\uparrow\rangle + \beta\, |\downarrow\rangle \qquad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \ .$$

Wie groß ist die kombinierte Wahrscheinlichkeit $W_{\uparrow,\nearrow}$, bei der z-Messung den Zustand $|\uparrow\rangle$ und bei der darauffolgenden "rotierten" Messung $|\nearrow\rangle$ zu finden (d.h. bei beiden Messungen "Spin auf")? Was gilt dagegen für die umgekehrte Reihenfolge, also wie groß ist $W_{\nearrow,\uparrow}$ für den Zustand $|\psi\rangle$?

c) Wie groß sind $W_{\uparrow,\nearrow}$ und $W_{\nearrow,\uparrow}$, falls sich das System in dem gemischten Zustand

$$\varrho \ = \ |\alpha|^2 \cdot |\uparrow\rangle\, \langle\uparrow| \ + \ |\beta|^2 \cdot |\downarrow\rangle\, \langle\downarrow| \qquad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

befindet?

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung von $P_\nearrow$ entweder die in Aufgabe P2 besprochene Darstellung für reine Zustände, oder die Tatsache, daß eine Drehung um die y-Achse auf die Spinoren vermöge der Matrix $\exp[\mathrm{i}\theta\sigma_y/2]$ wirkt.
Die Koeffizienten α und β sind komplex.